

Эффективные оценки:

Критерий эф-ти:

1) $T(x) - \tau(\theta) = a_n(\theta) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(x, \theta)$
если найдется ф-ция $a_n(\theta)$ такая что,
выполняется 1) $\Rightarrow$ оценка эф-ая.

Пример решения:

$X_1, \dots, X_n$ - независимы и имеют нормальное
распределение. $N(0, \theta^2)$. Док-ть, что $T(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$
является эф-ой оценкой $\tau(\theta) = \theta^2$.

① $T(x) - \tau(\theta) = a_n(\theta) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(x, \theta)$

② Проверим это условие:
$$L(x, \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi} \theta} e^{-\frac{x_i^2}{2\theta^2}} = \frac{e^{-\frac{1}{2\theta^2} \sum x_i^2}}{(\sqrt{2\pi} \theta)^n}$$

③ $\ln L(x, \theta) = -\frac{\sum x_i^2}{2\theta^2} - \ln(\sqrt{2\pi} \theta)^n$

④ $\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(x, \theta) = -\frac{n(\sqrt{2\pi})^n \theta^{n-1}}{(\sqrt{2\pi})^n \theta^n} + \frac{1}{\theta^3} \sum_{i=1}^n x_i^2 =$

$$= -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^3} \sum x_i^2 = \frac{n}{\theta^3} \left(\sum x_i^2 - \theta^2 \right) = a_n(\theta) \Rightarrow \text{эф-ая оценка}$$

ОПТИМАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ:

Для решения данного типа задач достаточно доказать 2 условия. Что статистика является 1) **полной** 2) **достаточной**.

Определение полноты: Статистика $T = T(X)$ наз-ся **полной**, если для всякой ограниченной ф-ии $\varphi(T)$ из того, что $E_{\theta} \varphi(T) = 0$ $\forall \theta \in \Theta$ следует, что $\varphi(T) = 0$ на множестве значений T .

Определение достаточности: Статистика $T = T(X)$ наз-ся **достаточной** для модели $F = \{F(X; \theta), \theta \in \Theta\}$, если условная плотность $h(x|t; \theta)$ случайной выборки (вектора) $X = (X_1, \dots, X_n)$ при условии $T(X) = t$ **не зависит от θ** .

Пример решения!

$X_1, \dots, X_n$ - независимы и имеют нормальное распределение $N(\theta, 1)$. Док-ть: $\bar{X} - \frac{1}{n}$ явл-ся оптимальной оценкой ф-ии $\eta(\theta) = \theta^2$.

Вспомогательная плотность нормального распредел-я:

$$f_z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \text{ где } a, \sigma^2 - \text{параметры}$$

$$N(a, \sigma^2)$$

Докажем достаточность:

Для это найдем ф-ию правдоподобия.

Ф-ия правдоподобия:

$L(X, \theta) = f(x_1, \theta) \cdot \dots \cdot f(x_n, \theta)$, где X -сл. величина
 θ -аргумент

$f(x_i, \theta)$ -соответствующие
плотности распр-ий.

$$L(X, \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\frac{(x_i - \theta)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} = \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\frac{1}{2}(x_i - \theta)^2}}{(\sqrt{2\pi})^n} =$$
$$= \frac{\prod_{i=1}^n e^{-\frac{x_i^2}{2}} \cdot e^{x_i \theta} \cdot e^{-\frac{n\theta^2}{2}}}{(\sqrt{2\pi})^n} = \frac{e^{-\frac{\sum x_i^2}{2}} \cdot e^{n\bar{x} \cdot \theta} \cdot e^{-\frac{n\theta^2}{2}}}{(\sqrt{2\pi})^n}, =$$

где $\bar{X} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$

$= h(x) \cdot g(T(x), \theta)$

$h(x)$ -не зависит от

$\theta \Rightarrow$ достаточность доказана

Докажем полноту:

$$E_{\theta} \varphi(\theta) = E(\bar{x}^2 - \frac{1}{n}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{по фор-ле дисперсии} \\ D(X) = E(X^2) - (EX)^2 \end{array} \right\} =$$

$$= D(\bar{x}) + (E\bar{x})^2 - \frac{1}{n} = \left\{ D(X) = \sigma^2 \right\} = \frac{1}{n} D x_1 + \theta^2 - \frac{1}{n} = \theta^2$$

$$E_{\theta} \varphi(\theta) = \theta^2 \Rightarrow \text{полнота доказана}$$

задача решена ■

Доверительные интервалы:

Доверительный интервал $I = (T_1(x), T_2(x))$, основанный на θ , используется для предположений о значении θ (θ -параметр) при известном размере выборки (кол-во экспериментов), рас-
пределении и коэф. доверия

$$1 - \alpha$$

доверит.
ин-л

$$\forall \theta \in \Theta \quad P(\theta \in (T_1(x), T_2(x))) \geq \gamma$$

Пример решения:

$X_1, \dots, X_n$ - независ. и имеют равномерное распр. на $[0, \theta]$. Построить кратчайший дов. ин-л для θ с коэф. доверия d , основанный на центр. статистике $B(x, \theta) = \frac{\max_{1 \leq i \leq n} X_i}{\theta}$

Центр. статистика $B(x, \theta)$ - случайная величина, распределение которой не зависит от θ . Пусть $T_i(x)$ - решения $B(x, T_i(x)) = g_i$

$$P(T_1(x) < \theta < T_2(x)) = P(g_1 < B(x, \theta) < g_2) \geq \gamma$$

Перейдем к практическим вычислениям:

Разрешим пер-во $g_1 < B(x, \theta) < g_2$ от θ и получим довер. ин-л.

$$\textcircled{1} g_1 < \frac{X(n)}{\theta} < g_2 \Rightarrow \underbrace{\frac{X(n)}{g_2}}_{\theta_1} < \theta < \underbrace{\frac{X(n)}{g_1}}_{\theta_2}$$

Длина доверий.

$$\text{ш-ла: } \left(\frac{X(n)}{g_2}, \frac{X(n)}{g_1} \right) = X(n) \left(\frac{1}{g_1} - \frac{1}{g_2} \right)$$

по условию задачи требуется найти (пос-
троить) кратчайший дов. ш-л. $\Rightarrow$ миними-
зируем некоторую длину ш-ла.

$$\textcircled{2} \text{ коэф. доверия } = \alpha \text{ (по условию)} \Rightarrow$$

$$P(\theta_1 < \theta < \theta_2) = \alpha \Rightarrow P\left(g_1 < \frac{X(n)}{\theta} < g_2\right) = \begin{cases} \text{по св-вам} \\ \text{ф-ции} \\ \text{распред-я} \end{cases}$$

$$= P\left(\frac{X(n)}{\theta} < g_2\right) - P\left(\frac{X(n)}{\theta} < g_1\right) = g_2^n - g_1^n = \alpha$$

$$\textcircled{3} \text{ Минимум } X(n) \left(\frac{1}{g_1} - \frac{1}{g_2} \right) \text{ достигается}$$

$$\text{при } \begin{cases} X(n) \left(\frac{1}{g_1} - \frac{1}{g_2} \right) = \left(\frac{X(n)}{g_2}, \frac{X(n)}{g_1} \right) \Rightarrow \\ g_2^n - g_1^n = \alpha \\ 0 \leq g_1 \leq g_2 \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{\min} X(n) \left(\frac{1}{g_1} - \frac{1}{g_2} \right) = \left(X(n), \frac{X(n)}{\sqrt[n]{1-\alpha}} \right)$$

$$\text{при } g_2 = 1 \quad g_1 = \sqrt[n]{1-\alpha}$$

$$\text{т.к. } g_2 = 1$$

$$1 - \alpha = g_1^n \Rightarrow \sqrt[n]{1-\alpha} = g_1$$

Метод максимального правдоподобия

Метод, который позволяет найти значение параметра, на котором достигается

$$\hat{\theta} \text{ параметра, на котором достигается}$$
$$\sum_{\theta \in \Theta} \ln L(X, \theta) = \ln L(X, \hat{\theta})$$

1) $\hat{\theta}$ - ОМП $\frac{\partial L(X, \theta)}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \ln L(X, \theta)}{\partial \theta} = 0$

2) $\exists$ произв $L(X, \theta) \rightarrow \max$.

$L(X, \theta)$ - ф-ла правдоподобия.

$L(X, \theta) = f(X_1, \theta) \cdot \dots \cdot f(X_n, \theta)$, где X - сл. вел.,
 θ - параметр,
 f - плотность

Пример решения:

$X_1, \dots, X_n$ - независимы и имеют Гауссова распр.
 $\Gamma(\theta, \lambda)$, λ - известно. Найти оценку макс правд.
для θ .

Вспомогательная Гауссова распределение.

$\Gamma(\theta, \lambda)$

$$f_Z(x) = \frac{x^{\lambda-1} e^{-x \cdot \theta}}{\Gamma(\lambda)}$$

где $\Gamma(\lambda)$ - гамма-ф-ла Эйлера

1) $L(X, \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{\theta^\lambda}{\Gamma(\lambda)} e^{-(X_i \cdot \theta)} \cdot X_i^{\lambda-1} = \frac{\theta^{n\lambda}}{(\Gamma(\lambda))^n} \cdot e^{-\theta \sum_{i=1}^n X_i} \cdot \prod_{i=1}^n (X_i^{\lambda-1})$

2) $\frac{\partial \ln L(X, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(n\lambda \ln \theta - n \ln \Gamma(\lambda) - \theta \sum_{i=1}^n X_i + (\lambda-1) \sum_{i=1}^n \ln X_i \right) =$
 $= \frac{n\lambda}{\theta} - \sum_{i=1}^n X_i =$

$$\frac{n\lambda}{\theta} - n\bar{X} = 0 \Rightarrow \frac{n\lambda}{\theta} = n\bar{X} \Rightarrow \frac{\lambda}{\theta} = \bar{X} \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{\lambda}{\bar{X}}$$

$\hat{\theta}$ - точка экстремума

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln L(X, \theta) = -\frac{n\lambda}{\theta^2} < 0 \Rightarrow \theta - \text{точка максимума}$$

$\Rightarrow \hat{\theta} = \frac{\lambda}{\bar{X}}$ - оценка максим. правдоп.

ОМП